ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ VÂN

PHƯƠNG TRÌNH FERMAT VÀ GIẢ THUYẾT EULER

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ VÂN

PHƯƠNG TRÌNH FERMAT VÀ GIẢ THUYẾT EULER

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy tôi GS.TSKH. Hà Huy Khoái, người đã trực tiếp hướng dẫn luận văn, đã tận tình chỉ bảo và hướng dẫn tôi tìm ra hướng nghiên cứu, tìm kiếm tài liệu, giải quyết vấn đề... nhờ đó tôi mới có thể hoàn thành luận văn cao học của mình. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới Thầy và tôi hứa sẽ cố gắng hơn nữa để xứng đáng với công lao của Thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đặc biệt các thầy giáo dạy cao học Phương pháp Toán sơ cấp đã quan tâm và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập tại trường. Tôi xin cảm ơn quý thầy cô Khoa Toán - Tin đã luôn quan tâm, động viên, trao đổi và đóng góp những ý kiến quý báu trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn của tôi.

Nhân dịp này tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên, cổ vũ, tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập.

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2017

Tác giả luận văn

Mai Thị Vân

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	Tập số thực.
$\mathbb{Z}$	Tập số nguyên.
$\mathbb{Q}$	Tập số hữu tỉ.
S	Mặt affine.
K	Tập hợp các ánh xạ hữu tỉ.
E	Đường cong elliptic trên trường hàm K.
$P_{(m)}$	Tập hợp các điểm trên E.
$\mathbb{P}^3$	Không gian ánh xạ ba chiều.
$PSL_2(\mathbb{Q})$	Nhóm tuyến tính các ma trận cấp hai hệ số hữu tỉ.
$\square$	Kết thúc chứng minh.

Mở đầu

Bài toán Fermat là câu chuyện độc nhất vô nhị trong lịch sử toán học thế giới, khởi nguồn từ cổ đại với nhà toán học Pythagore. Bài toán cuối cùng (sau này giới toán học gọi là *Định lý cuối cùng của Fermat*, hay *Định lý lớn Fermat*) có gốc từ định lý Pythagore: *"Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông"*.

Sau khi chứng minh rằng phương trình

$$x^4 + y^4 = z^4$$

không có nghiệm nguyên không tầm thường, Fermat phát biểu *Định lý cuối cùng của Fermat*, nói rằng phương trình

$$x^n + y^n = z^n$$

không có nghiệm nguyên không tầm thường với $n \geq 3$. Năm 1769, Euler phát biểu giả thuyết tổng quát nói rằng, phương trình tương tự như phương trình Fermat không có nghiệm không tầm thường nếu số bậc lớn hơn hoặc bằng số ẩn. Hơn 200 năm sau, N. Elkies, nghiên cứu sinh của Đại học Harvard, là người đầu tiên đưa ra phản ví dụ cho giả thuyết Euler với phương trình bậc 4 gồm 4 ẩn. Công trình đó đã mở đầu cho một hướng nghiên cứu mới, gắn liền việc xét nghiệm của phương trình

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^4 \tag{1}$$

với việc nghiên cứu các đường cong Elliptic.

Mục đích của luận văn trình bày lịch sử của bài toán Fermat và Giả thuyết Euler, cùng với công trình của Elkies và kết quả liên quan đến nghiệm nguyên của phương trình Euler.

Bố cục luận văn gồm phần mở đầu, hai chương trình bày nội dung của luận văn, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: "Bài toán Fermat và Giả thuyết Euler" trình bày lịch sử chứng minh một số trường hợp của Định lý Fermat, kết quả của Euler và Giả thuyết Euler.

Chương 2: "Sự tồn tại nghiệm của phương trình Euler" trình bày kết quả của Elkies và kết quả liên quan đến nghiệm nguyên của phương trình kiểu Fermat bằng cách đánh giá khoảng trống giữa tổng các căn bậc hai.

Chương 1

Bài toán Fermat và Giả thuyết Euler

Chương này trình bày lịch sử chứng minh một số trường hợp của Định lý Fermat, kết quả của Euler và Giả thuyết Euler.

1.1 Những trường hợp đặc biệt của bài toán Fermat

Người ta đã chứng minh rằng, phương trình $x^4+y^4+z^4+t^4 = w^2$ chỉ có ba nghiệm phụ thuộc tham số. Trong phần này, chúng tôi trình bày một số kết quả về phương trình $x^4+y^4+z^4+t^4 = (x^2+y^2+z^2-t^2)^2$, đặc biệt chứng tỏ rằng có thể nhận được nhiều vô hạn nghiệm phụ thuộc tham số bằng cách tìm các điểm trên đường cong Elliptic trên trường $\mathbb{Q}(m)$.

Jacobi và Madden xét phương trình

$$x^4+y^4+z^4+t^4 = (x+y+z+t)^4 \tag{1}$$

Họ đã cho thấy sự tồn tại của vô số các nghiệm nguyên của phương trình (1). Đây là trường hợp đặc biệt của phương trình

$$x^4+y^4+z^4+t^4 = w^4, \tag{2}$$

đối với nó Elkies tìm thấy một tập hợp vô hạn nghiệm nguyên khi $t = 0$. Trong phần này, chúng ta xem xét trường hợp đặc biệt của một phương trình tương tự

$$x^4+y^4+z^4+t^4 = w^2. \tag{3}$$

Xét phương trình (3), chúng ta nói một nghiệm là tầm thường khi có ít nhất 3 trong số x, y, z, t, w là 0, ví dụ $(x, y, z, t, w) = (x, 0, 0, 0, x^2)$. Nếu 2 và chỉ 2 trong số x, y, z, t, w là số không, thì các phương trình không có nghiệm không tầm thường, vì Fermat đã chứng minh rằng phương trình $x^4 + y^4 = w^2$ không có nghiệm nguyên khác không.

Nghiệm phụ thuộc tham số đầu tiên được biết là không tầm thường nhưng rất sơ cấp:

$$(x, y, z, t, w) = (a^2, ab, b^2, ab, a^4 + b^4).$$

Trong các nghiệm tiếp theo được tìm thấy bởi Fauquembergue, một trong những số x, y, z, t, w là số không, chẳng hạn $z = 0$:

$$(x, y, z, t, w) = (ac, bc, 0, ab, a^4 + a^2b^2 + b^4).$$

trong đó $a^2+b^2 = c^2$. Nghiệm sau đây cũng được tìm thấy bởi Fauquembergue, một lần nữa với giả thiết $a^2 + b^2 = c^2$:
$(x, y, z, t, w) = (2a^2bc^3, 2ab^2c^3, (a^2 - b^2)c^4, 2ab(a^4 + b^4),$

$$(a^6+2a^5b+3a^4b^2+3a^2b^4+2ab^5+b^6)(a^6-2a^5b+3a^4b^2+3a^2b^4-2ab^5+b^6)).$$

Ba nghiệm phụ thuộc tham số này cho ta nghiệm không tầm thường, ngoại trừ $ab = 0$.

1.1.1. Phương trình $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = (x^2 + y^2 + z^2 - t^2)^2$

Trong khi nghiên cứu phương trình (3), ta thấy một số tính chất cần chú ý. Xét ba trường hợp sau

i) Nếu $w = x^2+y^2+z^2+t^2$ thì $x^2y^2+x^2z^2+z^2t^2+y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2 = 0$; vì thế, chỉ có nghiệm tầm thường.

ii) Nếu $w = x^2 + y^2 - z^2 - t^2$ thì $x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 = t^2(x^2 + y^2 - z^2)$. Đây là trường hợp thú vị nhưng phức tạp. Chúng ta sẽ nghiên cứu trong tương lai.

iii) Nếu $w = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ thì $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = t^2(x^2 + y^2 + z^2)$. Trường hợp này cũng có vẻ thú vị và sẽ được thảo luận dưới đây, bắt đầu bằng một mệnh đề. Đây là một trường hợp mới được nghiên cứu.

Mệnh đề 1.1.1 *Nếu $x^2+y^2+z^2 \neq 0$ thì (x,y,z,t) thoả mãn*

$$x^4+y^4+z^4+t^4=(x^2+y^2+z^2-t^2)^2 \tag{4}$$

khi và chỉ khi

$$(x^2+y^2+z^2)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)=(x^2+y^2+z^2-t^2)^2 \tag{5}$$

và

$$t^2=\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{x^2+y^2+z^2}. \tag{6}$$

Chứng minh. Ta có

$$x^4+y^4+z^4+t^4-(x^2+y^2+z^2-t^2)^2=2((x^2+y^2+z^2)t^2$$

$$-(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)).$$

Vì (4) là thuần nhất bậc bốn, từ giờ ta viết nghiệm của phương trình này là $(x:y:z:t)$. Phương trình biểu diễn một mặt trong $\mathbb{P}^3$,

$$S^{'}=\{(x:y:z:t)\in\mathbb{P}^3|x^4+y^4+z^4+t^4=(x^2+y^2+z^2-t^2)^2\}$$

Giả sử $t\neq 0$, ta có thể xét mặt affine bởi tương ứng $(x,y,z)\leftrightarrow(x:y:z:1)$. Điều này sẽ cho ta thấy một mặt thú vị trong không gian ba chiều; xem hình vẽ 1.1.

Câu hỏi đặt ra là. Có bao nhiêu đường cong hữu tỉ $m\to(x(m),y(m),z(m))$ trên mặt $S^{'}$.

Nếu $xyz\neq 0$, thì (5) được thể hiện như sau

$$(x^2+y^2+z^2)(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2})=(x^2+y^2+z^2-t^2)^2$$

Điều này dẫn tới bổ đề sau.

Bổ đề 1.1.2 *Nếu $(x:y:z:t)$ là nghiệm của (4) mà $xyzt\neq 0$ thì $\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}:\frac{1}{t}\right)$ cũng là nghiệm của (4).*